XVI Wojewódzki Konkurs z Matematyki dla uczniów klas trzecich gimnazjów oraz klas trzecich oddziałów gimnazjalnych prowadzonych w szkołach innego typu województwa świętokrzyskiego w roku szkolnym 2018/2019

ETAP III – wojewódzki
16 marca 2019 r.

Liczba punktów możliwych do uzyskania: 40

Zasady ogólne:

1. Za każde poprawne rozwiązanie zadania inne niż w kluczu, przyznajemy maksymalną liczbę punktów.
2. Jeżeli uczeń pomimo polecenia typu *oblicz* nie przedstawił żadnych obliczeń, a napisał poprawną odpowiedź, to nie przyznajemy punktu za rozwiązanie zadania.
3. Jeżeli w zadaniu jest polecenie typu *Zapisz obliczenia i odpowiedź*, to oznacza, że uczeń powinien przedstawić swoje rozumowanie i sformułować odpowiedź lub podać ją w inny jednoznaczny sposób np. podkreślić, zakreślić kółkiem.
4. Punkty przyznajemy zgodnie z kryteriami punktowania, nie wolno dzielić punktów.

Zadanie 1. (0-7)

Z graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 12 *cm* i krawędzi bocznej 15 *cm* wycięto ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego wysokość jest równa 8 *cm* i którego podstawa jest jednocześnie podstawą graniastosłupa. Oblicz pole powierzchni i łączną długość wszystkich krawędzi otrzymanej w ten sposób bryły.

Przykładowe rozwiązanie:

Pole powierzchni powstałej bryły jest równe sumie pól: pola powierzchni podstawy graniastosłupa, czterech ścian bocznych tego graniastosłupa i czterech ścian bocznych ostrosłupa.

$$P_1 = 12^2 = 144\ (cm^2)$$

$$4P_2 = 4 \cdot 12 \cdot 15 = 720\ \ (cm^2)$$

Obliczamy wysokość ściany bocznej ostrosłupa, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

$$h = \sqrt{36 + 64} = 10\ (cm)$$

$$4P_3 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 = 240\ (cm^2)$$

$$P = 1104\ (cm^2).$$

Obliczamy długość krawędzi bocznej ostrosłupa, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

$$b = \sqrt{36 + 100} = 2\sqrt{34}\ \ (cm)$$

Zatem suma długości wszystkich krawędzi jest równa:

$$L = 2 \cdot 48 + 60 + 8\sqrt{34}\ \ (cm)$$

$$L = 156 + 8\sqrt{34}\ \ (cm)$$

$$L = 4(39 + 2\sqrt{34})\ (cm)$$

Klucz punktowania:

1 punkt – uczeń poprawnie oblicza pole podstawy (144 cm^2) i pole ściany bocznej graniastosłupa (180 cm^2) lub pole podstawy (144 cm^2) i sumę pól czterech ścian bocznych graniastosłupa (720 cm^2).

1 punkt – uczeń stosuje poprawną metodę wyznaczenia wysokości ściany bocznej ostrosłupa.

1 punkt – uczeń poprawnie oblicza wysokość ściany bocznej ostrosłupa (10 *cm*).

1 punkt – uczeń poprawnie oblicza pole ściany bocznej ostrosłupa (80 cm^2) lub sumę pól czterech ścian bocznych ostrosłupa (240 cm^2).

1 punkt – uczeń poprawnie oblicza pole powierzchni bryły (1104 cm^2).

1 punkt – uczeń poprawnie oblicza długość krawędzi bocznej ostrosłupa ($2\sqrt{34}\ cm$).

1 punkt – uczeń poprawnie oblicza sumę długości wszystkich krawędzi bryły ($4(39 + 2\sqrt{34})$ cm).

Zadanie 2. (0-9)

Bryły obrotowe F_1 i F_2 powstały przez obrót trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna ma długość $4\sqrt{3}$ i jeden z kątów ma miarę 60°, odpowiednio wokół krótszej i dłuższej przyprostokątnej.

a) Która z powstałych brył obrotowych ma większą objętość i o ile?

b) Która z powstałych brył obrotowych ma większe pole powierzchni i o ile?

Zapisz obliczenia.

Przykładowe rozwiązanie:

F_1 – bryła obrotowa powstała przez obrót tego trójkąta wokół krótszej przyprostokątnej.

F_2 – bryła obrotowa powstała przez obrót tego trójkąta wokół dłuższej przyprostokątnej.

Z zależności w trójkącie prostokątnym, którego kąty ostre mają miary 60° i 30° mamy, że długości przyprostokątnych to: $2\sqrt{3}$ oraz 6.

Objętość i pole powierzchni bryły obrotowej powstałej przez obrót tego trójkąta wokół krótszej przyprostokątnej to:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 36\pi = 24\sqrt{3}\pi \ (j^3)$$

$$P_1 = 6\pi(6 + 4\sqrt{3}) = 12\pi(3 + 2\sqrt{3}) \ (j^2)$$

Objętość i pole powierzchni bryły obrotowej powstałej przez obrót tego trójkąta wokół dłuższej przyprostokątnej to:

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 12\pi = 24\pi \ (j^3)$$

$$P_2 = 2\sqrt{3}\pi(4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) = 36\pi \ (j^2)$$

a)

$$V_1 - V_2 = 24\pi(\sqrt{3} - 1) \ (j^3)$$

Większą objętość ma bryła obrotowa F_1, powstała przez obrót tego trójkąta wokół krótszej przyprostokątnej o $24\pi(\sqrt{3} - 1)\ j^3$.

b)

$$P_1 - P_2 = 24\sqrt{3}\pi \ (j^2)$$

Większe pole powierzchni ma bryła obrotowa F_1, powstała przez obrót tego trójkąta wokół krótszej przyprostokątnej o $24\sqrt{3}\pi\ j^2$.

Klucz punktowania:

1 punkt – uczeń poprawnie wyznacza długości przyprostokątnych, korzystając z zależności w trójkącie prostokątnym, którego kąty ostre mają miary 60° i 30°.

1 punkt – uczeń stosuje poprawną metodę obliczenia objętości stożka.

1 punkt – uczeń poprawnie oblicza objętość stożka otrzymanego z obrotu trójkąta wokół krótszej przyprostokątnej ($24\sqrt{3}\pi$).

1 punkt – uczeń poprawnie oblicza objętość stożka otrzymanego z obrotu trójkąta wokół dłuższej przyprostokątnej (24π).

1 punkt – uczeń stosuje poprawną metodę obliczenia pola powierzchni stożka.

1 punkt – uczeń poprawnie oblicza pole powierzchni stożka otrzymanego z obrotu trójkąta wokół krótszej przyprostokątnej ($12\pi(3+2\sqrt{3})$).

1 punkt – uczeń poprawnie oblicza pole powierzchni stożka otrzymanego z obrotu trójkąta wokół dłuższej przyprostokątnej (36π).

1 punkt – uczeń stwierdza, że większą objętość ma bryła obrotowa F_1, powstała przez obrót tego trójkąta wokół krótszej przyprostokątnej o $24\pi(\sqrt{3}-1)\ j^3$.

1 punkt – uczeń stwierdza, że większe pole powierzchni ma bryła obrotowa F_1, powstała przez obrót tego trójkąta wokół krótszej przyprostokątnej o $24\sqrt{3}\pi\ j^2$.

Zadanie 3. (0-9)

Obwód trapezu równoramiennego jest równy 240 cm. Stosunek długości podstaw tego trapezu jest równy $11 : 16$, a stosunek wysokości tego trapezu do długości ramienia jest równy $12 : 13$. Oblicz pole tego trapezu. Zapisz obliczenia.

Przykładowe rozwiązanie:

I sposób

a, b – podstawy trapezu, c – ramię trapezu, h – wysokość trapezu, $a > 0, b > 0, c > 0, h > 0$.

Ponieważ $a : b = 11 : 16$, więc $a = \frac{11}{16} b$,

Ponieważ $h : c = 12 : 13$, więc $h = \frac{12}{13} c$.

Obwód trapezu jest równy: $\frac{11}{16} b + b + 2 \cdot c = 240$, czyli $\frac{27}{16} b + 2 \cdot c = 240$.

Ponieważ trapez jest równoramienny, więc z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$\left(\frac{12}{13} c\right)^2 + \left(\frac{5}{32} b\right)^2 = c^2$

Stąd $\frac{144}{169} c^2 + \frac{25}{1024} b^2 = c^2$, czyli $\frac{25}{1024} b^2 = \frac{25}{169} c^2$, $b^2 = \frac{1024}{169} c^2$, $b = \frac{32}{13} c$

Czyli:

$$\begin{cases} \frac{27}{16} b + 2 \cdot c = 240 \\ b = \frac{32}{13} c \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{80}{13} \cdot c = 240 \\ b = \frac{32}{13} c \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 39 \\ b = 96 \end{cases}$$

Stąd $a = 66\ cm, h = 36\ cm$.

Pole trapezu jest równe: $P = (66 + 96) \cdot \frac{36}{2} = 2916\ (cm^2)$.

II sposób

a, b – podstawy trapezu, c – ramię trapezu, h – wysokość trapezu

$a > 0, b > 0, c > 0, h > 0$

Ponieważ $a : b = 11 : 16$, więc $a = 11x$, $b = 16x$, $x > 0$.

Ponieważ $h : c = 12 : 13$, więc $h = 12y$, $c = 13y$, $y > 0$.

Obwód trapezu jest równy: $11x + 16x + 2 \cdot 13y = 240$, czyli $27x + 26y = 240$.

Ponieważ trapez jest równoramienny, więc: $b = 2{,}5x + 11x + 2{,}5x$.

Z twierdzenia Pitagorasa mamy $(12y)^2 + (2{,}5 \cdot x)^2 = (13y)^2$

Stąd $25y^2 = 6{,}25x^2$, czyli $x^2 = 4y^2$, $x = 2y$.

$$\begin{cases} 27x + 26y = 240 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 54y + 26y = 240 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = 6 \end{cases}$$

Zatem $a = 66\ cm, b = 96\ cm, h = 36\ cm$.

Pole trapezu jest równe: $P = (66 + 96) \cdot \frac{36}{2} = 2916\ (cm^2)$.

Klucz punktowania:

4 punkty – uczeń układa odpowiedni układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi (po 1 punkcie za poprawną metodę ułożenia każdego z równań, po 1 punkcie za poprawne ułożenie każdego z równań).

1 punkt – uczeń stosuje poprawną metodę rozwiązywania ułożonego układu równań.

1 punkt – uczeń poprawnie rozwiązuje ułożony układ równań.

2 punkty – uczeń poprawnie wyznacza długości podstaw trapezu i jego wysokość, korzystając z podanych zależności (1 punkt jeśli uczeń popełni jeden błąd rachunkowy).

1 punkty – uczeń poprawnie wyznacza pole trapezu.

Zadanie 4. (0-10)

Funkcja *f* posiada następujące własności:

- dziedziną funkcji *f* jest zbiór liczb spełniających warunek $-2 \leq x < 5$,
- zbiorem wartości funkcji *f* jest zbiór liczb spełniających warunek $-4 < y \leq 4$,
- dla każdego argumentu, który jest liczbą całkowitą, wartość funkcji jest liczbą całkowitą,
- $x = 4$ **nie jest** miejscem zerowym funkcji f,
- $2 \cdot f\,(-1) + 0{,}25 \cdot f\,(3) = 5$,
- $3 \cdot f\,(-2) \cdot f\,(1) = f(4)$,
- $f\,(-2) + f\,(1) = f(2)$,
- $f\,(-2) - f\,(1) - f\,(0) = -5$.

a) Wyznacz wartości funkcji f dla wszystkich argumentów, będących liczbami całkowitymi.

b) W układzie współrzędnych narysuj wykres takiej funkcji, która posiada wszystkie podane własności.

Przykładowe rozwiązanie:

a) Wiadomo, że:

1) dziedziną funkcji *f* jest zbiór liczb spełniających warunek $-2 \leq x < 5$,
2) zbiorem wartości funkcji *f* jest zbiór liczb spełniających warunek $-4 < y \leq 4$,
3) dla każdego argumentu, który jest liczbą całkowitą, wartość funkcji jest liczbą całkowitą,
4) $x = 4$ **nie jest** miejscem zerowym funkcji f,
5) $2f\,(-1) + 0{,}25f\,(3) = 5$,
6) $3f\,(-2) \cdot f\,(1) = f\,(4)$,
7) $f\,(-2) + f\,(1) = f(2)$,
8) $f\,(-2) - f\,(1) - f\,(0) = -5$.

Z warunków 5), 2) i 3) otrzymujemy, że $f\,(3)$ musi być liczbą całkowitą podzielną przez 4, większą od -4 i nie większą niż 4, czyli $f\,(3) = 4$ lub $f\,(3) = 0$.

Jeśli $f\,(3) = 0$, to $f\,(-1) = 2{,}5$, co jest niezgodne z warunkiem 3).

Zatem $\boldsymbol{f\,(3) = 4}$ oraz $\boldsymbol{f\,(-1) = 2}$.

Z warunków 6), 2) i 3) otrzymujemy, że $f\,(4)$ musi być liczbą całkowitą podzielną przez 3, większą od -4 i nie większą niż 4, czyli $f\,(4) = 0$ lub $f\,(4) = 3$ lub $f\,(4) = -3$.

Jednak z warunku 4) wiadomo, że $f\,(4) \neq 0$, więc $f\,(4) = 3$ lub $f\,(4) = -3$.

Jeśli $f\,(4) = 3$, to $f(-2) \cdot f\,(1) = 1$, czyli $f(-2) = 1$ i $f\,(1) = 1$ lub $f(-2) = -1$ i $f\,(1) = -1$.

Jeśli $f(-2) = 1$ i $f\ (1) = 1$, to z warunku 8) mamy $1 - 1 - f\ (0) = -5$, czyli $f\ (0) = 5$, co jest sprzeczne z warunkiem 2).

Jeśli $f(-2) = -1$ i $f\ (1) = -1$, to z warunku 8) mamy $-1 - (-1) - f\ (0) = -5$, czyli $f\ (0) = 5$, co jest sprzeczne z warunkiem 2).

Zatem $f\ (4) \neq 3$.

Jeśli $f\ (4) = -3$, to $f(-2) \cdot f\ (1) = -1$, czyli $f(-2) = -1$ i $f\ (1) = 1$ lub $f(-2) = 1$ i $f\ (1) = -1$.

Jeśli $f(-2) = -1$ i $f\ (1) = 1$, to z warunku 8) mamy $-1 - 1 - f\ (0) = -5$, czyli $f\ (0) = 3$.

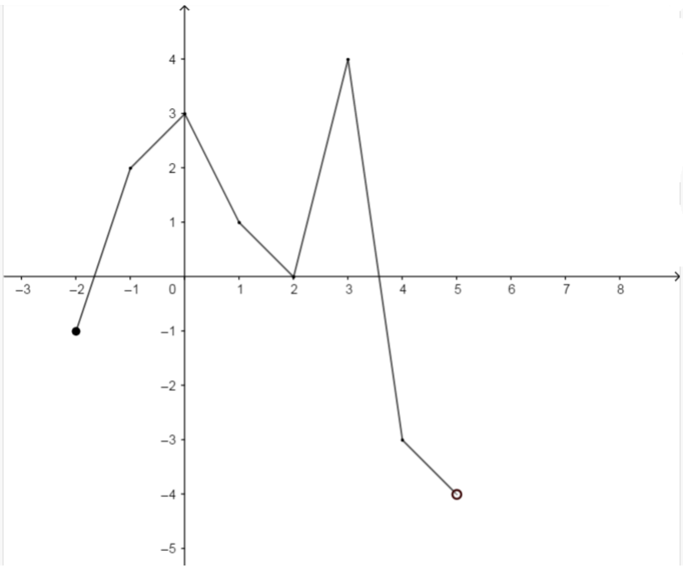
Jeśli $f(-2) = 1$ i $f\ (1) = -1$, to z warunku 8) mamy $1 - (-1) - f\ (0) = -5$, czyli $f\ (0) = 7$, co jest sprzeczne z warunkiem 2).

Zatem $\boldsymbol{f\ (4) = -3, f(-2) = -1}$, $\boldsymbol{f\ (1) = 1, f\ (0) = 3.}$

Ponieważ $f\ (-2) + f\ (1) = -1 + 1 = 0$, więc z warunku 7) mamy $\boldsymbol{f(2) = 0.}$

b)

Przykład wykresu funkcji posiadającej wskazane własności.



<u>Klucz punktowania:</u>

- 1 punkt – uczeń podaje, że $\boldsymbol{f(-2) = -1.}$
- 1 punkt – uczeń podaje, że $\boldsymbol{f\ (-1) = 2.}$
- 1 punkt – uczeń podaje, że $\boldsymbol{f\ (0) = 3.}$
- 1 punkt – uczeń podaje, że $\boldsymbol{f\ (1) = 1.}$
- 1 punkt – uczeń podaje, że $\boldsymbol{f(2) = 0.}$
- 1 punkt – uczeń podaje, że $\boldsymbol{f\ (3) = 4.}$
- 1 punkt – uczeń podaje, że $\boldsymbol{f\ (4) = -3.}$

- 3 punkty – uczeń rysuje wykres funkcji, która posiada wszystkie podane własności (2 punkty – uczeń rysuje wykres funkcji, która posiada siedem podanych własności i nie posiada jednej lub uczeń rysuje wykres funkcji, która posiada sześć podanych własności i nie posiada dwóch, 1 punkt – uczeń rysuje wykres funkcji, która posiada pięć podanych własności i nie posiada trzech lub uczeń rysuje wykres funkcji, która posiada cztery podane własności i nie posiada pozostałych czterech).

Zadanie 5. (0-5)

Uzasadnij, że liczba $\frac{1}{3333}(10^{4444}-1)$ **nie jest** podzielna przez 9.

Przykładowe rozwiązanie:

Liczba jest podzielna przez 9 jeśli suma jej cyfr jest podzielna przez 9.

Liczbę 10^{4444} można zapisać w postaci jedynki i 4444 zer.

Zatem liczba $10^{4444}-1$ to największa liczba 4444-cyfrowa zapisana za pomocą 4444 dziewiątek.

Liczbę $10^{4444}-1$ można zapisać w postaci sumy:

$10^{4444}-1 = 99990000\dots0000 + \cdots + 999900000000 + 99990000 + 9999$

$(w\ pierwszym\ składniku\ są\ cztery\ dziewiątki\ i\ 4440\ zer)$

$$\frac{1}{3333}(10^{4444}-1) = 30000\dots0000 + \cdots + 300000000 + 30000 + 3$$

$(w\ pierwszym\ składniku\ jest\ trójka\ i\ 4440\ zer)$

$$\frac{1}{3333}(10^{4444}-1) = 300030003\dots30003$$

Zatem liczba $\frac{1}{3333}(10^{4444}-1)$ ma 4441 cyfr, przy czym jest 3330 zer i 1111 trójek. Ponieważ $3\cdot 1111 = 3333$ i liczba 3333 nie jest podzielna przez 9, więc liczba $\frac{1}{3333}(10^{4444}-1)$ nie jest podzielna przez 9.

Klucz punktowania:

1 punkt – uczeń zauważa, że liczbę 10^{4444} można zapisać w postaci jednej jedynki i 4444 zer.

1 punkt – uczeń zauważa, że liczba $10^{4444}-1$ to największa liczba 4444-cyfrowa zapisana za pomocą 4444 dziewiątek.

1 punkt – uczeń zauważa, że daną liczbę można zapisać za pomocą 3330 zer i 1111 trójek.

1 punkt – uczeń oblicza sumę cyfr danej liczby (lub sumę cyfr liczby 1111).

1 punkt – uczeń stwierdza, że suma cyfr danej liczby nie jest podzielna przez 9 (lub że suma cyfr liczby 1111 nie jest podzielna przez 3), zatem dana liczba nie jest podzielna przez 9.