

II WOJEWÓDZKI KONKURS Z MATEMATYKI DLA UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH

Klucz odpowiedzi i kryteria punktowania zadań

III ETAP - WOJEWÓDZKI

3 marca 2018 r.

Liczba punktów możliwych do uzyskania: 40

Zasady ogólne:

1. W zadaniach zamkniętych od 1- 5 przyznajemy 1 pkt za zaznaczenie tylko poprawnej odpowiedzi. Jeżeli uczeń zaznaczył zarówno poprawą jak i błędną odpowiedź (lub błędne odpowiedzi), nie przyznajemy punktu.
2. W zadaniach 6 - 10 przyznajemy po jednym punkcie za poprawną ocenę (zaznaczenie tylko poprawnej odpowiedzi) każdego zdania.
3. Za każde poprawne rozwiązanie zadania otwartego inne niż w kluczu, przyznajemy maksymalną liczbę punktów.
4. Jeżeli uczeń pomimo polecenia typu *oblicz* nie przedstawił żadnych obliczeń, a napisał poprawną odpowiedź, to nie przyznajemy punktu za rozwiązanie zadania.
5. Jeżeli w zadaniu otwartym jest polecenie typu *Zapisz obliczenia i odpowiedź*, to oznacza, że uczeń przedstawi swoje rozumowanie i sformułuje odpowiedź lub poda ją w inny jednoznaczny sposób np. podkreśli, zakreśli kółkiem.
6. Punkty przyznajemy zgodnie z kryteriami punktowania, nie wolno dzielić punktów.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	D	C	C	C	PPP	FPP	PPF	FFP	PPF

ZADANIA OTWARTE**Zadanie 11. (0-3)**

Butelka w 76% wypełniona wodą, zawiera o 780 ml wody więcej niż wtedy, gdy jest w 76% pusta. Jaka jest pojemność tej butelki? Zapisz obliczenia i odpowiedź.

Rozwiązanie

I sposób

x - pojemność butelki (w ml)

$$(1 - 0,76)x = 0,76x - 780$$

$$0,24x = 0,76x - 780$$

$$0,52x = 780$$

$$x = 1500 \text{ (ml)}$$

Odp.: Butelka ma pojemność 1500 ml (1,5 l)

II sposób

$$0,76 - 0,24 = 0,52$$

0,52 pojemności butelki to 780 ml

$$\begin{array}{r} 0,52 \quad 780 \\ \downarrow : 0,52 \quad \downarrow : 0,52 \\ 1 \quad 1500 \end{array}$$

Odp.: Butelka ma pojemność 1500 ml (1,5 l)

Klucz punktowania:

- 1 punkt - uczeń zapisuje odpowiednie równanie ($0,24x = 0,76x - 780$) lub zapisuje odpowiednią zależność (0,52 pojemności butelki to 780 ml)

- 1 punkt – uczeń poprawnie rozwiązuje równanie lub poprawnie wykonuje dzielenie (780:0,52)
- 1 punkt – uczeń wyraża pojemności butelki w odpowiednich jednostkach (1500 ml lub 1,5 l)

Zadanie 12. (0-4)

Siedem lat temu Tobiasz był cztery razy starszy od Norberta. Za siedem lat Tobiasz będzie dwa razy starszy od Norberta. O ile lat Tobiasz jest starszy od Norberta? Przedstaw swoje rozumowanie.

Rozwiązanie

I sposób

x - wiek Norberta, $x \geq 7$

$x - 7$ - wiek Norberta siedem lat temu

$x + 7$ - wiek Norberta za siedem lat

$4(x - 7)$ - wiek Tobiasza siedem lat temu

$2(x + 7)$ - wiek Tobiasza za siedem lat

$$2(x + 7) - 4(x - 7) = 14$$

$$2x + 14 - 4x + 28 = 14$$

$$2x = 28$$

$$x = 14$$

$$2(14 + 7) - 7 = 35$$

$$35 - 14 = 21$$

Odp.: Tobiasz jest o 21 lat starszy od Norberta.

II sposób

x - wiek Norberta, $x \geq 7$

y - wiek Tobiasza

$$\begin{cases} y - 7 = 4(x - 7) \\ y + 7 = 2(x + 7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 14 \\ y = 35 \end{cases}$$

$$35 - 14 = 21$$

Odp.: Tobiasz jest o 21 lat starszy od Norberta.

III sposób

Siedem lat temu

Wiek Tobiasza

WN

WN

WN

WN

Wiek Norberta

WN

Obecnie

Wiek Tobiasza

WN

WN

WN

WN

7

Wiek Norberta

WN

7

Za siedem lat

Wiek Tobiasza

WN

WN

WN

WN

7

7

Wiek Norberta

WN

7

7

$$3 \cdot 7 = 21$$

Odp.: Tobiasz jest o 21 lat starszy od Norberta.

Klucz punktowania:

I sposób

- 1 punkt - uczeń poprawnie oznacza niewiadomą i układa odpowiednie równanie.
- 1 punkt - uczeń stosuje poprawną metodę rozwiązania równania.
- 1 punkt - uczeń poprawnie oblicza wiek Norberta i wiek Tobiasza.
- 1 punkt - uczeń poprawnie oblicza różnicę między wiekiem Tobiasza i wiekiem Norberta.

II sposób

- 1 punkt - uczeń poprawnie oznacza niewiadome i układa odpowiedni układ równań.
- 1 punkt - uczeń stosuje poprawną metodę rozwiązania układu równań.
- 1 punkt - uczeń poprawnie oblicza wiek Norberta i wiek Tobiasza.

- 1 punkt - uczeń poprawnie oblicza różnicę między wiekiem Tobiasza i wiekiem Norberta.

III sposób

- 1 punkt - uczeń sporządza odpowiedni rysunek, przedstawiając sytuację 7 lat temu.
- 1 punkt - uczeń sporządza odpowiedni rysunek, przedstawiając sytuację jaka będzie za 7 lat.
- 1 punkt - uczeń zauważa, że jedna część stanowi 7 lat.
- 1 punkt - uczeń poprawnie oblicza różnicę między wiekiem Norberta i wiekiem Tobiasza.

Zadanie 13. (0-4)

Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych (a, b) spełniających równanie

$$ab - a + b = 25$$

i uzasadnij, że nie ma ich więcej.

Rozwiązanie

$$ab - a + b = 25$$

$$b(a + 1) = 25 + a$$

$$b = \frac{25 + a}{a + 1}; a \neq -1$$

$$b = 1 + \frac{24}{a + 1}.$$

Liczba b będzie liczbą naturalną jeśli $a + 1$ będzie dzielnikiem liczby 24.

Dzielnik liczby 24	1	2	3	4	6	8	12	24
a	0	1	2	3	5	7	11	23
b	25	13	9	7	5	4	3	2
Czy a i b są liczbami pierwszymi	nie	nie	nie	tak	tak	nie	tak	tak

Pary spełniające podane warunki to: $(3, 7)$, $(5, 5)$, $(11, 3)$, $(23, 2)$.

Klucz punktowania:

- 2 punkty - uczeń wyznacza wszystkie cztery pary liczb (1 punkt jeśli wyznaczył trzy lub dwie pary liczb).

- 2 punkty - uczeń poprawnie uzasadnia, że nie ma więcej par liczb spełniających warunki, np.
 - przekształca równanie $ab - a + b = 25$ do postaci $b = 1 + \frac{24}{a+1}$ (1 punkt),
 - zauważa, że liczba b będzie liczbą naturalną, jeśli $a + 1$ będzie dzielnikiem liczby 24 (1 punkt).

Zadanie 14. (0-4)

W pudle znajdowało się 750 pomalowanych na niebiesko drewnianych kostek sześciennych o krawędzi 2 cm oraz 300 pomalowanych na żółto drewnianych kostek sześciennych o krawędzi 3 cm. Postanowiono zbudować z nich model sześcianu w następujący sposób. Najpierw tylko z kostek pomalowanych na niebiesko zbudowano możliwie największy model sześcianu (przy czym model ten był w środku cały wypełniony kostkami). Następnie oklejono go pomalowanymi na żółto kostkami sześciennymi tak, aby wszystkie ściany zbudowanego modelu sześcianu były pomalowane na żółto.

Ile kostek sześciennych o krawędzi 2 cm, a ile kostek sześciennych o krawędzi 3 cm zostało niewykorzystanych?

Zapisz obliczenia i odpowiedź.

Rozwiązanie

$10^3=1000$, czyli krawędź sześcianu zbudowanego z kostek pomalowanych na niebiesko musi być utworzona z mniej niż 10 kostek. Zauważmy, że $9^3=729$. Liczba 729 jest największą liczbą, która jest sześcianem pewnej liczby naturalnej i jednocześnie jest mniejsza od 750.

$$750 - 729 = 21 - \text{tyle zostało kostek pomalowanych na niebiesko}$$

I sposób

Długość krawędzi jednej ściany modelu sześcianu pomalowanego na niebiesko jest równa 18 cm. Zatem do jednej ściany doklejono 36 kostek sześciennych o krawędzi 3 cm (bo $18:3 = 6$; $6 \cdot 6 = 36$), a do wszystkich ścian $36 \cdot 6 = 216$.

Aby powstał sześcian trzeba było jeszcze dokleić 72 kostki na krawędziach (bo $12 \cdot 6 = 72$)

i 8 na „narożnikach”.

Zatem wykorzystano $216 + 72 + 8 = 296$ kostek pomalowanych na żółto.

$$300 - 296 = 4 - \text{tyle zostało kostek pomalowanych na żółto}$$

Odp.: Nie wykorzystano 21 kostek pomalowanych na niebiesko i 4 kostek pomalowanych na żółto.

II sposób

Długość krawędzi modelu sześcianu, którego ściany pomalowane są na niebiesko jest równa 18 cm . Długość krawędzi sześcianu, którego ściany pomalowane są na żółto jest równa $18 + 6 = 24\text{ (cm)}$, a jego objętość to: $24^3 = 13\,824\text{ (cm}^3\text{)}$.

Ponieważ model sześcianu zbudowanego tylko z niebieskich kostek ma objętość $729 \cdot 8 = 5832\text{ (cm}^3\text{)}$,

więc objętość bryły powstałej z żółtych kostek to $13\,824 - 5832 = 7992\text{ (cm}^3\text{)}$.

Objętość jednej kostki pomalowanej na żółto to 27 cm^3 .

$$7992 : 27 = 296$$

$$300 - 296 = 4$$

Odp.: Nie wykorzystano 21 kostek pomalowanych na niebiesko i 4 kostek pomalowanych na żółto.

Klucz punktowania:

- 1 punkt – uczeń zauważy, że $9^3 = 729$, więc tyle wykorzystano kostek pomalowanych na niebiesko.
- 1 punkt – uczeń zauważy, że długość krawędzi sześcianu, którego ściany pomalowane są na żółto jest równa 24 cm , (albo że jest równa sumie długości 9 krawędzi kostek pomalowanych na niebiesko i 2 krawędzi kostek pomalowanych na żółto, albo że jest równa sumie długości 8 krawędzi kostek pomalowanych na żółto).
- 1 punkt – uczeń poprawnie oblicza liczbę wykorzystanych kostek pomalowanych na żółto.
- 1 punkt – uczeń poprawnie oblicza liczbę niewykorzystanych kostek pomalowanych na niebiesko oraz liczbę niewykorzystanych kostek pomalowanych na żółto.

Zadanie 15. (0-5)

W prostopadłościanie F stosunek długości trzech krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka był równy $10:5:4$. Najpierw dwie dłuższe krawędzie tego prostopadłościanu zmniejszono o 40%, otrzymując prostopadłościan F_1 . Następnie najkrótszą z krawędzi prostopadłościanu F_1 zmniejszono o 60%, otrzymując prostopadłościan F_2 .

- Oblicz, o ile procent mniejsza jest objętość prostopadłościanu F_2 od objętości prostopadłościanu F .
- Oblicz, o ile procent większa jest objętość prostopadłościanu F_1 od objętości prostopadłościanu F_2 .

Rozwiązanie

$10x, 5x, 4x$ – długości krawędzi prostopadłościanu F

$V = 200x^3$ – objętość prostopadłościanu F

$6x, 3x, 4x$ – długości krawędzi prostopadłościanu F_1

$V_1 = 72x^3$ – objętość prostopadłościanu F_1

$6x, 1,2x, 4x$ – długości krawędzi prostopadłościanu F_1

$V_2 = 28,8x^3$ – objętość prostopadłościanu F_2

a)

$$\frac{200 - 28,8}{200} \cdot 100\% = \frac{171,2}{200} \cdot 100\% = 85,6\%$$

b)

$$\frac{72 - 28,8}{28,8} \cdot 100\% = \frac{43,2}{28,8} \cdot 100\% = 150\%$$

Klucz punktowania:

- 1 punkt – uczeń poprawnie oblicza objętość prostopadłościanu F .
- 1 punkt – uczeń poprawnie oblicza objętość prostopadłościanu F_1 .
- 1 punkt – uczeń poprawnie oblicza objętość prostopadłościanu F_2 .
- 1 punkt – uczeń poprawnie oblicza o ile procent mniejsza jest objętość prostopadłościanu F_2 od objętości prostopadłościanu F .
- 1 punkt – uczeń poprawnie oblicza o ile procent większa jest objętość prostopadłościanu F_1 od objętości prostopadłościanu F_2 .